Matematika A2 – implicitní funkce, extrémy.

1. Rozhodněte, zda rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitní funkce $y=y(x)$. Pokud ano, spočítejte $y'(x_0)$ a $y''(x_0)$, napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y)=0$ v bodě (x_0,y_0), aproximujte funkci $y(x)$ v okolí bodu x_0 Taylorovým polynomem 2. stupně, když:

$F(x,y) = x^2 - y^3 + x^2y - 1$, $(x_0,y_0) = (1,0)$

$F(x,y) = xy - e^x + e^y$, $(x_0,y_0) = (0,0)$

$F(x,y) = y^3 - 2y^2x - xy - 8$, $(x_0,y_0) = (0,2)$

$F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $(x_0,y_0) = (1,0)$

$F(x,y) = xy - \ln y - 2$, $(x_0,y_0) = (2,1)$

$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x_0,y_0) = \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

$F(x,y) = x^4 + y^4 - x^3y^3 - 9$, $(x_0,y_0) = (1,2)$

2. Rozhodněte, zda rovnicí $F(x,y,z)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) definována implicitní funkce $z=f(x,y)$. Pokud ano, vypočítejte $df(x_0,y_0)$ a $d^2f(x_0,y_0)$, napište rovnici tečné roviny a normály k ploše, definované rovnicí $F(x,y,z)=0$ v bodě (x_0,y_0,z_0), když:

$F(x,y,z) = z^3 - 2xz + y$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$

$F(x,y,z) = \frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}$, $(x_0,y_0,z_0) = (0,1,1)$

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 4$, $(x_0,y_0,z_0) = (0,0\,2)$

3. Napište rovnici tečné roviny a normály k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ v bodě (x_0,y_0,z_0), když:

$$F(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+xyz-6, \quad (x_0,y_0,z_0)=(1,2,-1)$$
$$F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2+1, \quad (x_0,y_0,z_0)=(2,2,3)$$
$$F(x,y,z) = x\sin z + y\cos z - e^z, \quad (x_0,y_0,z_0)=(2,1,0)$$

4. Napište rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $x^2+y^2+z=4$, rovnoběžné s rovinou $2x+2y+z=0$

5. Rozhodněte, kdy je rovnicí $G(x,y,z)=0$ definována implicitní funkce $z=z(x,y)$, je-li

$$G(x,y,z) = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{y}\right).$$

Ukažte, že platí

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

Několik příkladů na hledání extrémů

1. Rozhodněte, zda daná funkce má globální maximum (resp. globální minimum) na množině M. Vyšetřete též lokální extrémy funkce f na M.

$$f(x,y) = x(3-x^2)-y^2, \quad M=R^2$$
$$f(x,y) = x^4+y^4-x^2-2xy-y^2, \quad M=R^2$$
$$f(x,y) = x^2-xy+y^2-2x+y, \quad M=R^2$$
$$f(x,y) = x^3y^3(6-x-y), \quad M=R^2.$$

$f(x,y) = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$, $M = R^2$

$f(x,y) = xy \ln(x^2+y^2)$, $M = R^2 - \{[0,0]\}$.

2. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x,y)$ na M, je-li:

$f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x - 8y$, $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

$f(x,y) = x^2y\,(4-x-y)$, M je trojúhelník, ohraničený přímkami $x=0,\ y=0,\ x+y=6$

$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$, $M = \{[x,y];\ x^2+y^2 \leqq 4\}$

$f(x,y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)$, $M = \langle 0,\pi\rangle \times \langle 0,\pi\rangle$

$f(x,y) = xy$, $M = \{[x,y];\ x^2+y^2 \leqq 1\}$

$f(x,y) = xy^2$, $M = \{[x,y];\ x^2+y^2 \leqq 1\}$

$f(x,y) = x^2+y^2-2y$, $M = \{[x,y];\ x^2 \leq y \leq 4\}$

3. Nalezněte lokální extrémy funkce $z = z(x,y)$, která je řešením rovnice

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$$

4. (i) Při jakých rozměrech má pravoúhlá vana daného objemu V nejmenší povrch?

(ii) Nalezněte bod paraboly $y^2=2x$, který je nejblíže bodu $A\,[1,4]$.